

Time : Three Hours]

[Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्नों से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Solve any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई-1/Unit-I

1. (a) सिद्ध कीजिए किसी समूह G के सभी स्वकारिताओं का समुच्चय प्रतिचित्रणों के संयोजन को संयोजन के रूप में लेने के सापेक्ष एक समूह निर्मित करता है।

Prove that the set of all automorphisms of a group G forms a group with respect to composition of mapping as the composition.

(b) सिद्ध कीजिए कि $N(a)$, G का एक उपसमूह है।

Prove that $N(a)$ is a subgroup of G .

(c) सिलो के प्रथम प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove first sylow's theorem.

इकाई-2/Unit-II

2. (a) सिद्ध कीजिए किसी वलय R की दो गुणजावलियों S और T के लिए $S \cup T$, R की एक गुणजावली होता है यदि और केवल यदि या तो $S \subseteq T$ या $T \subseteq S$

Prove that for two ideals S and T of any ring R , $S \cup T$ is an ideal of R if and only if either $S \subseteq T$ or $T \subseteq S$.

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी स्वेच्छ वलय $(R, +, \cdot)$ पर सभी बहुपदों का समुच्चय $R[x]$ बहुपदों के योग और गुणन के सापेक्ष एक वलय होता है।

Prove that $(R, +, \cdot)$ is an arbitrary Ring and set $R[x]$ of all polynomials over a ring is a ring with respect to addition and multiplications.

(c) सिद्ध कीजिए कि $Hom_1(Q, Q) \cong Q$ वलय है।

Prove that $Hom_1(Q, Q) \cong Q$ is ring.

इकाई-3/Unit-III

3. (a) मान लो $w = \{(a_1 a_2 a_3) = a_1 a_2 a_3 \in F_1 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$ तो दर्शाइये कि $W, V_3(F)$ का उपसमष्टि होता है।

Let $w = \{(a_1 a_2 a_3) = a_1 a_2 a_3 \in F_1 \mid a_1 + a_2 + a_3 = 0\}$ show that W is a subspace of $V_3(F)$.

(b) यदि $V(f)$ एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है तब सिद्ध कीजिए कि V के कोई दो आधार समान संख्या में अवयवों के रखते हैं।

If $V(f)$ is a finite dimensional vector space, then prove that any two bases of V have the same number of elements.

(c) यदि w_1 और w_2 एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $v(f)$ की दो उपसमष्टियां हैं तो सिद्ध कीजिए।

$dim(w_1 + w_2) = dim w_1 + dim w_2 - dim(w_1 \cap w_2)$.

If w_1, w_2 are two subspaces of a finite dimensional vector space $v(f)$, then prove that

$dim(w_1 + w_2) = dim w_1 + dim w_2 - dim(w_1 \cap w_2)$.

इकाई-4/Unit-IV

4. (a) कैले हेमिलटन प्रमेय को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Cayley-Hamilton theorem.

(b) द्विघाती समघात $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2$ वर्गों के योगफल के रूप में रूपान्तरित कीजिए।

Reduce the quadratic form $x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2$ into canonical form.

(c) सममित आव्यूह A से लांबिक आव्यूह P प्राप्त करो जो इसको विकणीकृत करता है जहां :

find an orthogonal matrix P which digonalizes the real symmetric matrix A :

Where:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

इकाई-5/Unit-V

5. (a) श्वार्ज असमिका को लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

State and prove Schwarz's Inequality.

(b) सिद्ध कीजिए कि एक आन्तर गुणन समष्टि v में शून्येतर सदिशों को कोई लांबिक समुच्चय रेखितः स्वतंत्र होता है।

Prove that any orthogonal set of non-zero vectors in an inner product space V is linearly independent.

(c) सिद्ध कीजिए प्रत्येक परिमित विमीय आन्तर गुणन समष्टि एक प्रसामान्य लांबिक आधार रखता है।

Prove that every finite dimensional inner product space has an orthogonal basis.